Тәжірибелік сабақ 4
Ішектің тербеліс теңдеуі үшін Коши есебі.Даламбер формуласы

$Q=\{(x,t):\ x\in R,\ t>0\}$ - жарты жазықтығында анықталған

$$U_{tt}=a^2U_{xx}+f(x,t) \tag{1}$$

бір өлшемді толқын теңдеуін қарастырайық. (1) теңдеуін еркін емес ішек тербілісінің теңдеуі деп атайды.

(1) теңдеуінің

$$U(x,0)=\varphi(x),\ U_t(x,0)=\psi(x),\ \ x\in R \tag{2}$$

бастапқы шарттарын қанағаттандыратын $C^{2,2}(Q)\cap C^{0,1}(\overline{Q})$ класында жататын классикалық шешімін табу керек.

Жоғарыда көрсетілгендей (7.5.1)- (7.5.2) Коши есебінің $U(x,t)$ шешімін

$$\upsilon_{tt}=a^2\upsilon_{xx},\ \ x\in R,\ \ t>0, \tag{3}$$

$$\upsilon(x,0)=\varphi(x),\ \ \upsilon_t(x,0)=\psi(x),\ \ \ x\in R \tag{4}$$

есебінің $\upsilon(x,t)$ шешімімен

$$\omega_{tt}=a^2\omega_{xx}+f(x,t),\ \ x\in R,\ \ t>0, \tag{5}$$

$$\omega(x,0)=0,\ \ \omega_t(x,0)=0,\ \ \ x\in R \tag{6}$$

есебінің $\omega(x,t)$ шешімінің қосындысы ретінде табамыз.

Бірінші (3)- (4) есебінің $\upsilon(x,t)$ жалпы шешімі

$$\upsilon(x,t)=f_1(x-at)+f_2(x+at) \tag{7}$$

(7) – біртекті теңдеудің классикалық шешімі болу үшін f_1 және f_2 функциялары екі рет үзіліссіз дифференциалданатын функциялар болуы қажет.

5–қадам. Бастапқы шарттарды пайдаланып, f_1 және f_2 функцияларын табамыз:

$$\upsilon(x,0)=f_1(x)+f_2(x)\Rightarrow f_1(x)+f_2(x)=\varphi(x)$$

$$\upsilon_t(x,0)=f_1'(x)(-a)+f_2'(x)a\Rightarrow -a\,f_1'(x)+a\,f_2'(x)=\psi(x)$$

$$\begin{cases} f_1(x)+f_2(x)=\varphi(x) \\ -a\int_0^x f_1'(s)ds+a\int_0^x f_2'(s)ds=\int_0^x\psi(s)ds \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} f_1(x)+f_2(x)=\varphi(x) \\ -f_1(x)+f_2(x)=\frac{1}{a}\int_0^x\psi(s)ds+c \end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} f_2(x)=\frac{1}{2a}\int_0^x\psi(s)ds+\frac{c}{2}+\frac{\varphi(x)}{2} \\ f_1(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)-\frac{1}{2a}\int_0^x\psi(s)ds-\frac{c}{2} \end{cases}$$

6-қадам. f_1 пен f_2 функцияларының табылған мәндерін (7) апарып қойып,

$$\upsilon(x,t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)ds \tag{8}$$

формуласын аламыз. (8) формуласын *Д'аламбер формуласы* деп атайды.

Сонымен, егер $\varphi(x)\in C^2(R),\ \psi(x)\in C^1(R)$ болса, онда (8) формуласымен анықталатын $\upsilon(x,t)$ функциясы (3) – (4) есебінің классикалық шешімін анықтайды.

Коши есептерінің шешімдерін табу керек:

а) $\begin{array}{l} U_{xx} + 2\cos x U_{xy} - \sin^2 x U_{yy} - \sin x U_y = 0 \\ U(x,y)\big|_{y=\sin x} = x + \cos x,\ U_y(x,y)\big|_{y=\sin x} = \sin x. \end{array}$

ә) $\begin{array}{l} U_{xx} - 2\sin x U_{xy} - (3+\cos^2 x)U_{yy} - \cos x U_y = 0 \\ U(x,y)\big|_{y=\cos x} = \sin x,\ U_y(x,y)\big|_{y=\cos x} = e^{-\frac{x}{2}}\cos x. \end{array}$

б) $\begin{array}{l} U_{xx} + 2U_{xy} - 3U_{yy} = 0 \\ U(x,y)\big|_{y=0} = 3x^2,\ U_y(x,y)\big|_{y=0} = 0. \end{array}$

в) $\begin{array}{l} U_{tt} = U_{xx} + U_{yy} \\ U(x,y,t)\big|_{t=0} = x^2y^2,\ U_t(x,y,t)\big|_{t=0} = x^2y^2 - 3x^2. \end{array}$

г) $\begin{array}{l} U_{tt} = U_{xx} + U_{yy} - xyt \\ U(x,y,t)\big|_{t=0} = 0,\ U_t(x,y,t)\big|_{t=0} = xy. \end{array}$

ғ) $\begin{array}{l} U_{tt} = U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} \\ U(x,y,z,t)\big|_{t=0} = xyz,\ U_t(x,y,z,t)\big|_{t=0} = x^2y^2z^2 \end{array}$